

Correction de l'épreuve de physique I filière TSI

Concours CNC session 2016

L'ÉTUDE DE QUELQUES BILANS ÉNERGÉTIQUES AYANT UNE INFLUENCE SUR LES PARAMÈTRES CLIMATIQUES DU SOL TERRESTRE

1 ère partie : Énergie transmise par rayonnement du soleil vers la terre

1.1 Propagation du rayonnement solaire

I.1.1- Les expressions de :

- ▶ la densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$u_{em} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2(M, t) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(M, t)$$

- ▶ le vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0}$$

I.1.2- L'expression de la puissance électromagnétique

$$\mathcal{P}_S = \iint_S \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}$$

I.1.3- L'expression de l'énergie électromagnétique

$$U_{em} = \iiint_{V(S)} u_{em}(M, t) d\tau$$

I.1.4- L'expression globale du bilan d'énergie électromagnétique :

On considère une région de l'espace, de volume V délimitée par une surface fermée S , dans laquelle règne un champ électromagnétique $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$; Ce domaine contient une énergie électromagnétique $U_{em}(t)$.

Le bilan d'énergie pendant une durée dt s'écrit

$$\delta\mathcal{W}_r = \delta\mathcal{W}_j + \delta\mathcal{W}_e$$

- ▶ L'énergie reçue : $\delta\mathcal{W}_r = - \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt$ (pour une surface fermée la normale est orientée vers l'extérieur)

- ▶ L'énergie dissipée : $\delta\mathcal{W}_j = - \iint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau dt$

- ▶ L'énergie emmagasinée : $\delta\mathcal{W}_e = \mathcal{W}_e(t + dt) - \mathcal{W}_e(t) = \iiint_V u_{em} d\tau$

Le bilan d'énergie donne :

$$\iiint_V u_{em} d\tau = - \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt - \iint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau dt$$

Or $\iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{\Pi} \cdot d\tau$ Ce qui donne

$$\text{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

1.1.5- L'expression du bilan d'énergie électromagnétique en régime permanent.

En régime permanent $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = 0$ et par conséquent :

$$\text{div} \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

1.1.6- L'expression de la puissance électromagnétique totale \mathcal{P}_S rayonnée :

$$\mathcal{P}_S = \iint \varphi \, dS \implies \mathcal{P}_S = 4\pi\sigma T_S^4 R_S^2$$

1.1.7- La propagation rectiligne des rayonnements électromagnétiques solaires :

Puisque les milieux de propagation (vide et l'atmosphère) sont linéaires, homogènes et isotropes alors la propagation est rectiligne.

1.1.8- La relation donnant l'expression de φ_s en fonction de \mathcal{P}_s :

On a : $\text{div} \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$ dans le vide $\vec{j} = \vec{0}$ donc $\text{div} \vec{\Pi} = 0$ c'est à dire conservation du flux c'est à dire la puissance

$$\mathcal{P}_s = \varphi_s 4\pi D^2 \implies \varphi_s = \frac{\mathcal{P}_s}{4\pi D^2}$$

Puisque la symétrie est sphérique

1.1.9- Estimation de la température de surface du soleil T_s .

En remplace \mathcal{P}_s par son expression on obtient

$$\varphi_s = \frac{\sigma R_s^2 T_s^4}{D^2} \implies T_s = \sqrt[4]{\frac{\varphi_s D^2}{\sigma R_s^2}}$$

A.N :

$$T_s = 5761 \text{ K}$$

1.1.10- La forme des puissances thermiques surfaciques reçues par le sol terrestre de température

T_t :

- ▶ $\varphi_{i \rightarrow s} = \iint -\lambda_t \overrightarrow{\text{grad}} T_t \cdot d\vec{S}$
- ▶ $\varphi_{a \rightarrow s} = \iint h(T_t - T_a) \vec{n} \cdot d\vec{S}$

Avec :

- λ_t la conductivité thermique du sol.
- h coefficient de Newton pour l'interface sol-atmosphère.

1.2 Production de l'énergie du soleil

1.2.1- La réduction canonique :

▶ Dans le référentiel \mathbb{R}

- $\overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_1 \implies \vec{V}_1 = \vec{V}_G + \vec{V}_1^*$
- $\overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_2 \implies \vec{V}_2 = \vec{V}_G + \vec{V}_2^*$
- $(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2 \implies (m_1 + m_2)\vec{V}_G = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$
- La RFD donne :

$$m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} = \vec{F}_{2/1} \text{ et } m_2 \frac{d\vec{V}_2}{dt} = \vec{F}_{1/2} \text{ ce qui donne } (m_1 + m_2)\vec{V}_G = \vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{1/2} = \vec{0}$$

par conséquent $\vec{V}_G = \vec{cte}$ or à $t = 0$ les deux particules ont même énergie cinétique (vitesses opposées $\vec{V}_1 = -\vec{V}_2$) ce qui donne que le point G est fixe dans le référentiel \mathbb{R}

▶ Dans le référentiel barycentrique \mathbb{R}^* galiléen puisque le système est isolé

$$m_1 \frac{d\vec{V}_1^*}{dt} = \vec{F}_{2/1} \text{ et } m_2 \frac{d\vec{V}_2^*}{dt} = \vec{F}_{1/2}$$

En posant $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1}$ donc la vitesse relative de M_2 par rapport à M_1 vaut $\overrightarrow{V}^* = \overrightarrow{V}_2^* - \overrightarrow{V}_1^* = \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt}$

Il en résulte que

$$\frac{d\overrightarrow{V}^*}{dt} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\overrightarrow{F}_{1/2} \implies \frac{d\overrightarrow{V}^*}{dt} = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{F}_{1/2}$$

Avec $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ la masse réduite de la particule fictive.

D'où

$$\overrightarrow{F}_{1/2} = \mu \frac{d\overrightarrow{V}^*}{dt} = \mu \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} = \mu \frac{d^2 \overrightarrow{GM}}{dt^2}$$

Dans le référentiel barycentrique \mathbb{R}^* le système isolé de deux points matériels est équivalent à un point fictif (nommé aussi mobile équivalent) de masse μ (masse réduite) soumis à l'action de la force $\overrightarrow{F}_{1/2}$

1.2.2- L'expression de l'énergie :

► potentielle : comme (à l'échelle atomique) la force gravitationnelle est très négligeable devant la force électrique alors

$$\varepsilon_p(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} (+cte \rightarrow 0)$$

► mécanique :

$$\varepsilon_m(M) = \varepsilon_c + \varepsilon_p \implies \varepsilon_m(M) = \frac{1}{2}\mu\overrightarrow{V}^{*2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Puisque $\mu = \frac{m_p}{2}$ et G fixe dans \mathbb{R} ainsi les particules ont même énergie cinétique (système conservatif)

$$\varepsilon_m(M) = \frac{1}{4}m_p\overrightarrow{V}^{*2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = 3kT$$

1.2.3- L'expression de :

► l'énergie mécanique correspondante : en $r = r_o$ la vitesse est nulle donc

$$\varepsilon_m = +\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_o} \xrightarrow{\text{A.N}} \varepsilon_m = 2,3 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

► l'énergie cinétique initiale

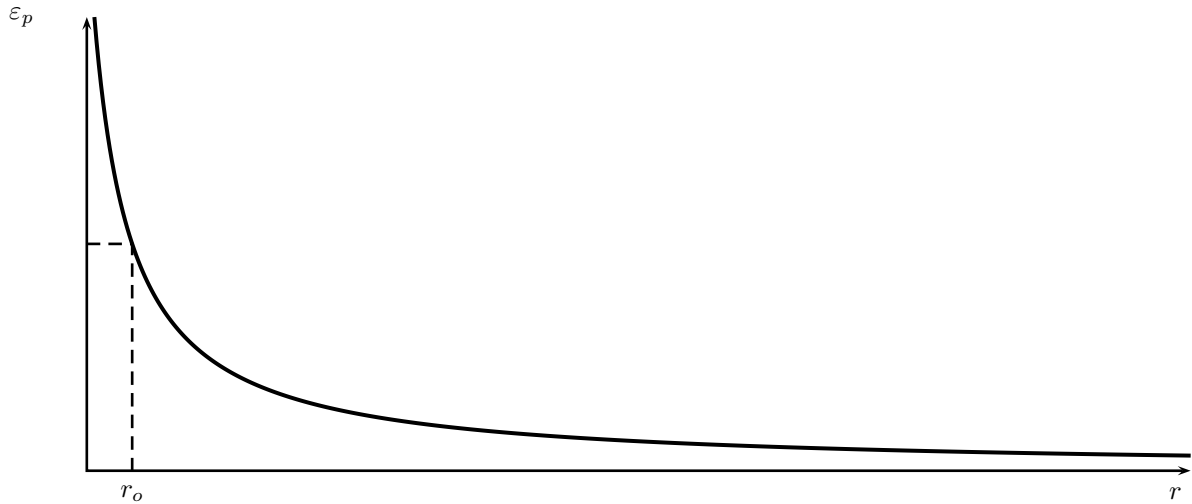
$$\varepsilon_{c,i} = \varepsilon_{th} = \frac{\varepsilon_m}{2} \implies \varepsilon_{c,i} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_o} \xrightarrow{\text{A.N}} \varepsilon_{c,i} = 1,152 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

► la température correspondante T_o

$$\varepsilon_{c,i} = \varepsilon_{th} = \frac{3}{2}kT_o \implies T_o = \frac{e^2}{12k\pi\epsilon_0 r_o} \xrightarrow{\text{A.N}} T_o = 5565 \text{ MK}$$

Valeur très grande.

1.2.4- Discussion graphique



1.2.5- La mécanique classique (<https://fr.wikipedia.org/wiki/Fusion-nucléaire>)

Une réaction de fusion nucléaire nécessite que deux noyaux atomiques s'interpénètrent. Il faut pour cela que les noyaux surmontent l'intense répulsion due à leurs charges électriques (toutes deux positives) (phénomène dit de « barrière coulombienne »). Si l'on appliquait uniquement les lois de la mécanique classique, la probabilité d'obtenir la fusion des noyaux serait très faible, en raison de l'énergie cinétique (correspondant à l'agitation thermique) extrêmement élevée nécessaire au franchissement de la barrière. Cependant, la mécanique quantique prévoit, ce qui se vérifie en pratique, que la barrière coulombienne peut également être franchie par effet tunnel, à des énergies plus faibles.

1.2.6- La durée (en années) durant laquelle le soleil rayonnerait de l'énergie :

Soit E l'énergie totale du soleil donc $E = \mathcal{P}_s \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{E}{\mathcal{P}_s}$

Or $E = \frac{NE^o}{4}$ avec E^o l'énergie dégagée par 4 noyaux et N le nombre de protons

Ainsi $\frac{N}{N_A} = \frac{0,1M_s}{m_p} = \frac{m(^1H)}{m_p}$

il en résulte

$$\Delta t = \frac{0,1M_s E^o}{\mathcal{P}_s m_p} \xrightarrow{\text{A.N}} \Delta t = 9,5 \times 10^9 \text{ années}$$

Remarque : le pourcentage 10% est faible la valeur réelle est 75%.

1.3 Influence du rayonnement solaire sur la température du sol terrestre

1.3.1- Variation de la température avec le lieu sur la Terre.

1.3.1.1- Justification : Puisque $R_t \ll D$ alors la propagation peut être considérée comme rectiligne (approximation de l'onde plane) (question identique à (I.1.7))

1.3.1.2- Comparaison :

On a : $\mathcal{P} = \varphi S \cos \lambda$ donc la puissance (et par conséquent la température) augmente lorsque λ diminue, il en résulte que :

$$T_E > T_M > T_N$$

1.3.2- Influence du mouvement orbital de la Terre sur la température du globe

1.3.2.1- L'expression de la force gravitationnelle du soleil sur la terre :

$$\vec{F} = -\frac{GM_s M_t}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{OO}'}{r}$$

I.3.2.2- Le mouvement de la Terre est plan, en effet :

La force \vec{F} est centrale donc le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{F} = \vec{0} \implies \vec{\sigma}_o = \vec{cte}$$

par conséquent le mouvement est plan

I.3.2.3- Les expressions des distances :

► La distance minimale

$$r_{min} = \frac{r_o}{1+e}$$

► La distance maximale

$$r_{max} = \frac{r_o}{1-e}$$

I.3.2.4- La variation relative de la distance soleil-terre

$$\varepsilon_r = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{min}} \implies \varepsilon_r = \frac{2e}{1-e} \xrightarrow{\text{A.N}} \varepsilon_r = 34 \times 10^{-3} \ll 1$$

La trajectoire de la terre est une ellipse qui tend vers un cercle

I.3.2.5- L'expression de la variation relative de la température :

► La température maximale :

$$T_{max} = \frac{K}{\sqrt{r_{min}}}$$

► La température minimale :

$$T_{min} = \frac{K}{\sqrt{r_{max}}}$$

Ce qui donne

$$\varepsilon_T = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - 1 \xrightarrow{\text{A.N}} \varepsilon_T = 17,15 \times 10^{-3} \ll 1$$

La température peut être quasi uniforme.

I.3.2.6- La température maximale T_{max} prévue par ce modèle

$$T_{max} = 277,7 \text{ K}$$

Commentaire

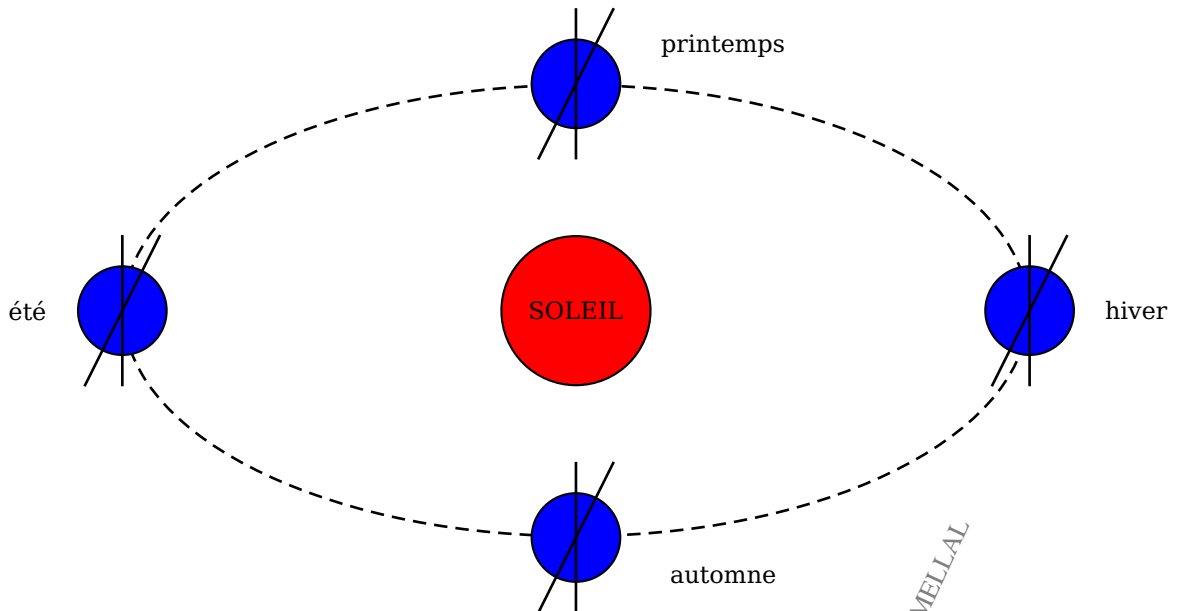
• La différence entre T_{max} et T_{min} est faible devant T_{min} donc on peut considérer que la température est constante.

ou

• puisque la différence entre T_{max} et T_{min} est faible, donc le modèle n'est pas convenable.

I.3.3- Influence de l'inclinaison de l'axe de rotation de la terre sur la température

I.3.3.1- La trajectoire du centre de la terre et Les débuts des quatre saisons pour l'hémisphère nord.



I.3.3.2- Expression du moment cinétique de la terre :

$$\vec{\sigma}_o = \vec{OO'} \wedge M_t \vec{V}(O') \implies \vec{\sigma}_o = M_t r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = c \vec{e}$$

► La loi des aires :

$$dA = \frac{1}{2} \|\vec{OO'} \wedge d\vec{OO'}\| \implies \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{2}$$

Avec C la constante des aires.

Loi des aires : le vecteur $\vec{OO'}$ balaye des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux.

I.3.3.3- La durée, en ans, de l'hiver

On a d'après la loi des aires : $\frac{A_H}{\Delta t_H} = \frac{\pi ab}{\tau_a}$

Et puisque $e \ll 1 \implies ab = r_o^2$ (la trajectoire est une ellipse qui tend vers un cercle) ce qui donne

$$\Delta t_H = \frac{A_H}{\pi r_o^2} \tau_a$$

Et comme $A_H = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} r^2 d\theta \implies A_H = \frac{r_o^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - 2e \cos \theta)^2 d\theta$ ce qui donne

$$A_H = \frac{\pi r_o^2}{4} \left(1 - \frac{4e}{\pi}\right)$$

Il en résulte que

$$T_H = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{4e}{\pi}\right) \tau_a \xrightarrow{\text{A.N}} T_H = 0,244 \text{ an}$$

I.3.3.4- l'écart relatif maximal entre les flux surfaciques

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{max} &= \frac{P_s}{4\pi r_{min}^2} \\ \varphi_{min} &= \frac{P_s}{4\pi r_{max}^2} \end{aligned} \right\} \implies \varepsilon_\varphi(\lambda) = \frac{4e}{(1-e)^2}$$

Application numérique

$$\varepsilon_\varphi(\lambda) = 0,07 \text{ W m}^{-2}$$

I.3.3.5- La latitude au point C vaut

$$\lambda(C) = -\alpha \xrightarrow{\text{A.N}} \lambda(C) = -23,5^\circ \quad \text{saison d'été}$$

I.3.3.6- La durée minimale t_{12} séparant les instants t_1 et t_2 .

$$\tau_{12} = t_2 - t_1 = \frac{\tau_a}{2}$$

I.3.3.7- La durée qui sépare le lever et le coucher du soleil pendant une journée n'est pas constante car elle dépend de la latitude du point ainsi l'angle entre les rayons solaires et la normale \vec{n} .

I.3.3.8- Le tableau.

Position	M_1	M_2	M'_1	S_1
Saison	Hiver	Été	Hiver	Été
Comparaison	$\tau_{lc} < \tau_{jm}$	$\tau_{lc} > \tau_{jm}$	$\tau_{lc} < \tau_{jm}$	$\tau_{lc} > \tau_{jm}$

I.3.3.9- La saison qui règne à l'équateur.

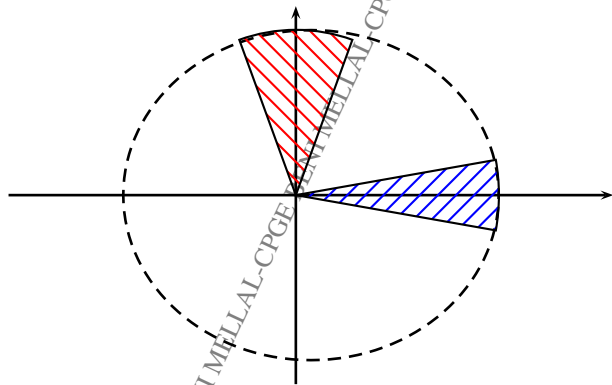
A l'instant t_1 l'équateur est en été.

A l'instant $t_1 + \frac{\tau_a}{4}$ l'équateur est en automne.

1.4 Utilisation des satellites en météorologie

I.4.1- La deuxième loi de Kepler :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{C}{2} = \frac{\sigma_o}{2M_t}$$



Les deux surfaces sont égales et balayées pendant la même durée.

I.4.2- Les relations liant chacune des périodes à l'altitude correspondante :

la RFD donne : $\frac{GM_t m}{r^2} = m \frac{V^2}{r} \Rightarrow V^2 = \frac{GM_t}{r}$

Ainsi $V = \frac{2\pi r}{T}$ et par conséquent :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_t} r^3$$

Il en résulte que

► Pour SPOT

$$\tau_S^2 = \frac{4\pi^2}{GM_t} (R_t + h_S)^3$$

► Pour METEOSAT

$$\tau_M^2 = \frac{4\pi^2}{GM_t} (R_t + h_M)^3$$

I.4.3- Puisque le satellite M survole le même point de la terre donc c'est un satellite géostationnaire donc M tourne dans le sens de rotation de la terre, il est situé dans le plan équatorial.

I.4.4- La longueur de la région terrestre :

$$L = 6000 \times 10 \Rightarrow L = 60 \text{ km}$$

I.4.5- Le nombre de révolutions effectuées par SPOT pour réaliser une observation complète de la Terre :

- lors d'une période S balaye la surface $2\pi R_t \ell$
- Lors de N période S balaye la surface de la terre $4\pi R_t^2$

donc

$$N = \frac{4\pi R_t^2}{2\pi R_t \ell} = \frac{2R_t}{\ell} \xrightarrow{\text{A.N}} N = 1,28 \times 10^6$$

2 ème partie : Atmosphère de la Terre

2.1 Quelques ordres de grandeur

II.1.1- Une estimation de :

► La masse de l'atmosphère

$$M_{atm} = 5,14 \times 10^{18} \text{ kg}$$

► La hauteur de l'atmosphère

$$H_{atm} = 800 \text{ km}$$

II.1.2- Une estimation de la masse des océans M_{oc}

$$M_{oc} = 0,70\rho 4\pi R_t^2 H_{oc} \xrightarrow{\text{A.N}} M_{oc} \approx 1,4 \times 10^{21} \text{ kg}$$

II.1.3- puisque $M_{atm} < M_{oc}$ alors l'atmosphère est la plus sensible aux perturbations climatiques dues à l'activité humaine.

2.2 Modèle d'atmosphère terrestre

II.2.1- La masse molaire de l'air

$$M_a = 0,80M(N_2) + 0,20M(O_2) \xrightarrow{\text{A.N}} M_a = 28,8 \text{ g mol}^{-1}$$

II.2.2- La relation fondamentale de la statique des fluides :

La tranche est en équilibre donc par projection suivant Oz de la résultante des forces donne

$$P(z)dS - P(z+dz)dS - \rho(z)gdz = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dz} + \rho(z)g = 0$$

II.2.3- La loi de variation de l'intensité du champ de pesanteur $g(z)$ en fonction de l'altitude z
 Dans une modélisation sphérique de la terre

$$g(z) = g_o \frac{R_t^2}{(R_t + z)^2}$$

Ainsi

$$\frac{g_o - g(z_m)}{g_o} = 10^{-4} \Rightarrow z_m = 3200 \text{ m}$$

Donc jusqu'à quelques km l'approximation est justifiée.

II.2.4- L'expression de la pression en fonction de z

On remplace $\rho(z)$ par son expression $\rho = \left(\frac{P}{cte}\right)^{1/k}$ dans l'équation de la statique des fluides on obtient

$$P = P_o \left(1 - \frac{k-1}{k} \frac{g\rho_o}{P_o} z\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

II.2.5- La loi de température :

Puisque $PM_a = \rho RT \Rightarrow T = \frac{PM}{R\rho}$ ce qui conduit à

$$T = T_o \left(1 - \frac{k-1}{k} \frac{g\rho_o}{P_o} z\right) = T_o \left(1 - \frac{k-1}{k} \frac{gM_a}{RT_o} z\right)$$

Par conséquent

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{k-1}{k} \frac{M_a g}{R}$$

Application numérique

$$k = \frac{1}{1 + \frac{R}{Mg} \frac{dT}{dz}} \xrightarrow{\text{A.N}} k = 1,25$$

2.3 Étude d'un ballon sonde

II.3.1- Montrons que le rapport des masses volumiques de l'hélium et de l'air d est indépendant de l'altitude lors de l'ascension :

Puisque les gaz sont parfaits alors :

$PM_a = \rho_a RT$ ainsi $PM_{He} = \rho_{He} RT$ donc

$$d = \frac{\rho_{He}}{\rho_a} = \frac{M_{He}}{M_a} = cte$$

C'est à dire que la densité de l'hélium par rapport à l'air ne dépend pas de l'altitude z

II.3.2- L'expression de sa composante au sol :

$$F_z(z=0) = F_A - P_T \Rightarrow F_z(z=0) = g[\rho_a V_o(1-d) - m]$$

II.3.3- La condition pour que le ballon s'élève est

$$F_z(z=0) > 0$$

Application numérique

$$F_z(z=0) = 758 \text{ N}$$

Valeur positive donc la condition est réalisée .

II.3.4- Expression du volume $V(z)$ au cours de l'ascension :

On a :

$$P = P_o \left(1 - \frac{k-1}{k} \frac{g\rho_o}{P_o} z\right)^{\frac{k}{k-1}} \text{ et } T = T_o \left(1 - \frac{k-1}{k} \frac{gM_a}{RT_o} z\right)$$

Ainsi l'équation d'état du GP donne

$$V(z) = \frac{nRT(z)}{P(z)} \Rightarrow V(z) = V_o \left(1 - \frac{k-1}{k} \frac{gM_a}{RT_o} z\right)^{\frac{1}{1-k}}$$

II.3.5- L'altitude maximale z_o atteinte lorsque $V(z) = V_{max}$.

Pour $V = V_{max} = 2V_o$ on a

$$z_o = \frac{k}{k-1} \frac{RT_o}{gM_a} (1 - 2^{1-k}) \xrightarrow{\text{A.N}} z_o = 68,9 \text{ km}$$

II.3.6- Montrons que la force ascensionnelle décroît et s'annule pour une altitude z_{max} :

Pour $z > z_o$ l'hélium s'échappe du ballon donc $n_{He}(z)$ varie à $V = V_{max}$ et donc d'après l'équation d'état du GP on a :

$$P(z)V_{max} = n_{He}(z)RT(z) \Rightarrow n_{He}(z) = \frac{P_o V_{max}}{RT_o} \left[1 - \frac{k-1}{k} \frac{gM_a}{RT_o} z\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

Dans ce cas la force F à pour expression : $F_z = g[\rho_a V_{max}(1-d) - m]$

Or $d = \frac{\rho_{He}}{\rho_a} = \frac{M_{He}}{M_a} \Rightarrow \rho_a = \frac{M_a}{M_{He}} \rho_{He} = \frac{M_a}{V_{max}} n(He)$ donc $\rho_a V_{max} = M_a n(He)$; il en résulte que

$$F_z = g \left[(1-d) \frac{M_a P_o V_{max}}{RT_o} \left(1 - \frac{k-1}{k} \frac{gM_a}{RT_o} z\right)^{\frac{1}{k-1}} - m \right]$$

Donc lorsque z croît F_z décroît et s'annule pour $z = z_{max}$

$$z_{max} = \frac{kRT_o}{(k-1)M_a g} \left[1 - \left(\frac{mRT_o}{(1-d)P_o M_a V_{max}} \right)^{k-1} \right]$$

Application numérique

$$z_{max} = 7909 \text{ m}$$

2.4 Un dispositif de mesure de l'humidité de l'air

II.4.1- Préliminaire sur l'équilibre liquide-vapeur

II.4.1.1- La pression de vapeur saturante : C'est la pression lors d'un changement d'état (fonction croissante de la température)

II.4.1.2- Pour $HR = 100 \Rightarrow P_{H_2O(g)} = P_{H_2O}^{sat}$ c'est à dire que l'atmosphère est saturée en eau vapeur (l'atmosphère contient le maximum d'eau vapeur à la température T)

II.4.2- L'expression de $v_c(t)$.

la loi des maille donne

$$v_c + RC_{HR} \frac{dv_c}{dt} = v_s$$

avec $v_s = \pm V_{sat}$.

► La solution :

Pour $t = 0$ on a $v_s = V_{sat}$ et en posant $\tau = RC_{HR}$ la constante du temps du circuit on obtient

$$v_c(t) = V_{sat}(1 - e^{-t/\tau})$$

II.4.3- Détermination de l'instant t_o de basculement :

pour $t = t_o$ on a $\varepsilon = V_+ - V_-$ change de signe avec $v_- = \pm \frac{R}{R+R} V_{sat} \Rightarrow V_- = \pm \frac{V_{sat}}{2}$ et $V_+ = v_c(t)$

Ce qui donne

$$\frac{V_{sat}}{2} = V_{sat}(1 - e^{-t_o/\tau}) \Rightarrow t_o = \tau \ln 2 = RC_{HR} \ln 2$$

II.4.4- L'équation différentielle vérifiée par la tension $v_c(t)$ pour $t \geq t_o$

En fait un changement d'origine des temps en prenant $t_o = 0$ pour la suite : et sachant que pour $t \geq t_o$ on a $v_s = -V_{sat}$ donc

$$v_c + RC_{HR} \frac{dv_c}{dt} = -V_{sat} \Rightarrow v_c(t \geq t_o) = V_{sat} \left(\frac{3}{2} e^{-t/\tau} - 1 \right)$$

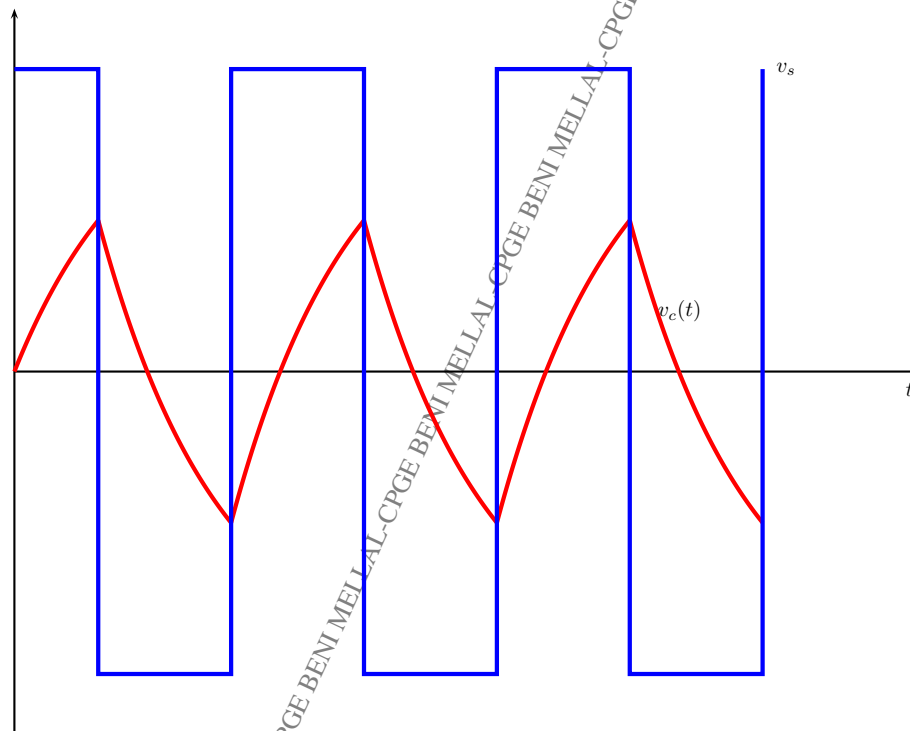
II.4.5- L'instant t_1 de basculement

En t_1 le $\varepsilon > 0$ c'est à dire

$$v_c(t_1) = -\frac{V_{sat}}{2} \Rightarrow t_1 = \tau \ln 3$$

N.B : t_1 est compté à partir de t_o et représente la demi-période du signal .

II.4.6- Représentation graphique



La période du signal

$$T_{HR} = 2(t_1 - t_o) = 2\tau \ln 3 = 2RC_{HR} \ln 3$$

II.4.7- La valeur de la constante de temps est déduite de la période du signal

$$\tau = RC_{HR} = \frac{T_{HR}}{2 \ln 3}$$

II.4.8- Puisque $f_{HR} = \frac{1}{T_{HR}} \Rightarrow f_{HR} = \frac{1}{2RC_{HR} \ln 3}$

et puisque C_{HR} dépend de l'humidité relative donc en mesurant la fréquence et connaissant la loi $C_{HR} = C_{HR}(HR)$ on remonte à la valeur de HR

II.4.9- Pour un condensateur plan de section S et d'épaisseur e rempli par un diélectrique de permittivité diélectrique relative ε_r sa capacité vaut

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{e}$$

Puisque ε_r dépend de la nature du diélectrique ici $\varepsilon_r = \varepsilon_r(HR)$ alors la capacité dépend de l'humidité relative.

CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL